入 学 試 験 問 題

前

数学 （理系）

（学習用配点 300 点）

2027 年度 東北大学・非公式予想問題

試験時間 150 分　前期日程対策　全　6　問

注 意 事 項

1 開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。

2 問題冊子は 7 ページ、全 6 問である。印刷の欠落や不鮮明な箇所がないか確認すること。

3 解答には、黒鉛筆または黒色シャープペンシルを用いること。

4 解答用紙の指定欄に受験番号と氏名を記入すること。指定欄以外へ識別情報を書かないこと。

5 解答は、解答用紙の指定された欄に記すこと。設問ごとの字数や語数の条件を守ること。

6 解答欄には設問と関係のない文章・記号・符号を書かないこと。計算・論証の必要な設問は途中の過程も示すこと。

7 この問題冊子の余白は下書きに用いてよい。冊子のページを切り離さないこと。

8 問題冊子と解答用紙を照合し、解答すべき大問と小問の取り違えがないようにすること。

9 経済学部理系・理学部・医学部医学科ほか理系学部の数学（150 分）を想定した演習用。配点は学習用の独自配点で、大学の学部別配点とは異なる。

10 本冊子は非公式の独自予想問題である。大学の公式試験問題ではなく、配点と採点基準は学習用の独自設計である。

第　1　問

（50 点）

n を正の整数とし、整式 $x^{2n}+x^n+1$ を x^2+x+1 で割った余りを $R_n(x)$ とする。

(1) $R_n(x)$ を求めよ。

(2) m を 2 以上の整数とする。$m^{2n}+m^n+1$ が m^2+m+1 で割り切れるための、n についての必要十分条件を求めよ。

(3) $2^{2n}+2^n+1$ が 21 で割り切れるような 100 以下の正の整数 n の個数を求めよ。

第　2　問

（50 点）

1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードから、同時に 3 枚を取り出す。取り出した 3 枚に書かれた数の和が 3 の倍数であるという事象を A、積が 3 の倍数であるという事象を B、最大の数が 9 であるという事象を C とする。

(1) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ。

(2) 事象 B が起こったときに事象 A が起こる条件付き確率 $P_B(A)$ を求め、$P(A)$ との大小を比べよ。

(3) 事象 A と事象 C は独立であるか。理由をつけて答えよ。

第　3　問

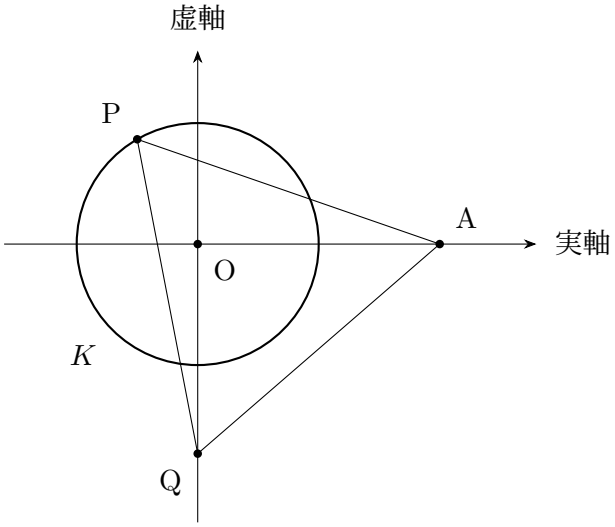
（50 点）

複素平面上で、原点 O を中心とする半径 1 の円を K とし、点 P(z) は K 上を動く。点 A(2) をとり、線分 AP を 1 辺とする正三角形 APQ を、頂点 A、P、Q がこの順に反時計回りに並ぶようにつくる。点 Q を表す複素数を w とする。

(1) w を z で表し、点 Q が描く図形を求めよ。

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする。線分 OQ の長さの最大値と最小値、およびそれぞれを与える θ を求めよ。

(3) 三角形 OPQ の面積 S の最大値と、そのときの θ を求めよ。



第　4　問

（50 点）

実数 c に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める。ただし、根号の中が負になったときは、それ以降の項は定まらないものとする。

(1) すべての正の整数 n について a_n が定まるような c の値の範囲を求めよ。

(2) $c = \dfrac{7}{4}$ とする。すべての正の整数 n について $\dfrac{7}{4} \leqq a_n < 2$ かつ $a_{n+1} > a_n$ であることを示せ。

(3) $c = \dfrac{7}{4}$ とする。すべての正の整数 n について $2 - a_{n+1} \leqq \dfrac{4}{5}(2 - a_n)$ が成り立つことを示し、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

第　5　問

（50 点）

曲線 $C : y = \log x$ に原点から引いた接線を ℓ とする。C、ℓ および x 軸で囲まれた部分を D とする。

(1) ℓ の方程式と接点の座標を求めよ。また、D の面積を求めよ。

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_x を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_y を求めよ。

ただし、$\log x$ は自然対数とする。

第　6　問

（50 点）

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。辺 OA の中点を M とし、辺 BC 上の点 N を $\mathrm{BN} : \mathrm{NC} = t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ となるようにとる。

(1) MN $\perp$ OA であることを示せ。また、MN $\perp$ BC となる t の値を求めよ。

(2) 以下、N は (1) で求めた t に対する点とする。$0 < s < 1$ とし、辺 OC 上に $\mathrm{OL} = s$ となる点 L をとる。3 点 M、N、L を通る平面は辺 AB と交わることを示し、その交点を K として、AK を s で表せ。

(3) (2) の平面による正四面体の切り口は四角形 MLNK である。その面積 $S(s)$ を求め、$S(s)$ の最小値を求めよ。

